16 鴿籠原理（抽屜原理）

如果你家有四個人，卻僅有三個房間，那麼至少有一個房間要住兩個人以上；或者你買了五樣東西共花了一百零一元，那麼這五樣東西中，至少有一樣的價值超過二十元。諸如此類的簡單算術稱為鴿籠原理（或抽屜原理），所以鴿籠原理是我們日常生活中常會碰到的基本現象。本節的主要目的，就是要在適當的數論及幾何問題上引進鴿籠原理，看是否能得到一些不顯然或者是意想不到的結果。

16.1 鴿籠原理（抽屜原理）

定理 16.1(鴿籠原理)　試證明

(1) 將 n 個東西分成 m 類。若 $n \geq m+1$，則至少有一類東西的數目大於或等於 2。

(2) 將 n 個東西分成 m 類。若 $n \geq rm+1$，則至少有一類東西的數目大於或等於 $r+1$。

【証明】這原理的證明是很明顯的，理由是將 n 個東西放在 m 個抽屜裡。若 $n \geq rm+1$，則至少有一抽屜放了 $(r+1)$ 個東西以上。

16.2 鴿籠原理的算數應用

如果 x 是一個實數，我們將 x 表為一個整數與一個小於 1 的正小數的和，並用符號 $\{x\}$ 代表這個正小數。例如

$$\begin{array}{llllll} x & = 2.345 & \to x & = 2 + 0.345 & \to & \{x\} = 0.345, \\ y & = -1.62 & \to y & = -2 + 0.38 & \to & \{y\} = 0.38, \\ z & = \sqrt{2} & \to z & = 1 + (\sqrt{2}-1) & \to & \{z\} = \sqrt{2}-1. \end{array}$$

定理 16.2　如果 N 是一個正整數，α 是一個無理數。試證明可以找到 m,n 使得

$$0 < m + n\alpha < \frac{1}{N}.$$

【証明】因為 α 不是有理數，所以 $n\alpha$（n 是不為零的整數）的小數部份不為零。

現在將 $(0, 1)$ 區間均分成 N 等分，即

$$\left(0,\frac{1}{N}\right],\left(\frac{1}{N},\frac{2}{N}\right],\cdots,\left(\frac{N-1}{N},1\right).$$

根據鴿籠原理知道：底下$N+1$個數

$$\{1\cdot\alpha\},\{2\cdot\alpha\},\cdots,\{N\cdot\alpha\},\{(N+1)\cdot\alpha\}\in(0,1)$$

至少有 2 個落在同一區間，並假設正整數

$$1\le n_1< n_2\le N+ 1$$

使得

$$\{n_1\alpha\},\{n_2\alpha\}$$

落在同一區間，則

$$\begin{cases} n_1\alpha=m_1+\{n_1\alpha\} \\ n_2\alpha=m_2+\{n_2\alpha\} \\ |\{n_1\alpha\}-\{n_2\alpha\}|<\dfrac{1}{N} \end{cases} \Rightarrow |(m_1-m_2)-(n_1-n_2)\alpha|<\frac{1}{N}.$$

因此可以找到整數$m=m_1-m_2,\ n=-n_1+n_2$或$m=-(m_1-m_2),\ n=n_1-n_2$使得

$$0<m+n\alpha<\frac{1}{N}.$$

16.3 羅瑟貝利猜想

羅瑟貝利猜想是指：任意不被 5 整除的正整數 n 都存在至少一個正整數m使得mn的各位數字不是 6 就是 7。例如$n=23$時，我們取$m=29$得到 29×23 = 667。

在 1990 年時，羅瑟貝利猜想已被多位數學家解決[9,10]（讀者是否有自己的解法呢）。在這節裡，我們將證明一個較簡單的版本如下：

定理 16.3 任意正整數n都存在至少一個正整數m使得mn的各位數字不是 1 就是 0。(例如：$n=7$ 時可取$m=143$ 得到 143×7=1001)

我們考慮下列$n+1$個數（把它們想成$n+1$隻鴿子）

$$1,11,111,\cdots,\overbrace{111\cdots1}^{n},\overbrace{111\cdots1}^{n+1}$$

被n除之所得餘數（餘數相同者表示住在同一個籠子）。因為有$n+1$個正整數，所以根據鴿籠原理知道：至少有兩個數被n除之，餘數一樣。設此兩數為

$$a=\overbrace{111\cdots1}^{i},\ b=\overbrace{111\cdots1}^{j};\ i<j$$

則

$$n\mid(b-a)=\overbrace{111\cdots1}^{j-i}\overbrace{000\cdots0}^{i}$$

得證。

[9] G. Berzsenyi, The Roseberry conjecture, Quantum (May 1990).

[10] G. Berzsenyi, At siexes and sevens, Quantum (November 1990).

習題 16.1　阿山的家是一個3×4平方單位的矩形。若阿山生了六個小孩，則證明至少有兩個小孩的距離不大於$\sqrt{5}$單位。

習題 16.2　十七位科學家中每一位和其他人都通信。在他們的信件往來中僅僅討論三個題目，而每兩位科學家僅討論一個題目。證明至少有三位科學家，他們彼此討論的問題都一樣。[11]

[11] 先固定一位科學家。

習題 16.3　在半徑為 1 的圓上畫一個正方形及一個正三角形。若圓周上的這七個頂點不相同，則證明至少有兩個頂點所構成的弧長不大於$\frac{\pi}{12}$。

習題 16.4　單位長的正方形內任意擺放若干個圓（圓半徑可以不相等）。若這些圓的周長和為 7，則證明：可以畫一條與正方形邊平行的線且此線至少與三個圓相交。

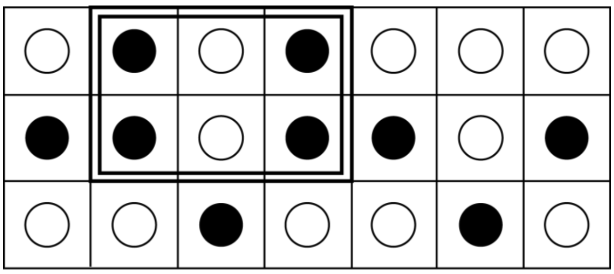
習題 16.5　如果 N, p 是正整數，q 為整數，α 是一個無理數。證明可以找到整數 m,n 使得

$$\left| m + n\alpha - \frac{q}{p} \right| < \frac{1}{N}.$$

習題 16.6　設 m 為正整數且正整數 $17 \cdot m$ 的各位數字不是 1 就是 0。試求 m 的最小值為何？

習題 16.7　設 m 為正整數且正整數 $29 \cdot m$ 的各位數字不是 1 就是 0。試求 m 的最小值為何？

習題 16.8　在 7×3 的矩形棋盤上任意放置黑白兩種棋子（如下圖）每個格子都必須擺放棋子。試證明：必可在棋盤上畫出一個小矩形（矩形的四個頂點所在的格子都不一樣，也就是矩形的長與寬都大於一格）使得四個頂點所在的格子所擺的棋子都是同一種顏色（如下圖所示 3×2 的小矩形）。



習題 16.9　在一個邊長皆為正整數的矩形撞球台 $ABCD$ 中，其中 A,B,C,D,E,F 為此撞球台的六個洞（E,F 分別是線段 BC 與 AD 的中點）且 $BC = 2AB$。一球 O 從 A 點撞出，第一次碰到撞球台的邊 BC，離 B 點的距離為 α，假設此球除非進洞否則此球會在撞球台上不停的跑。試問

(1) 球 O 會進洞的充分必要條件是什麼？

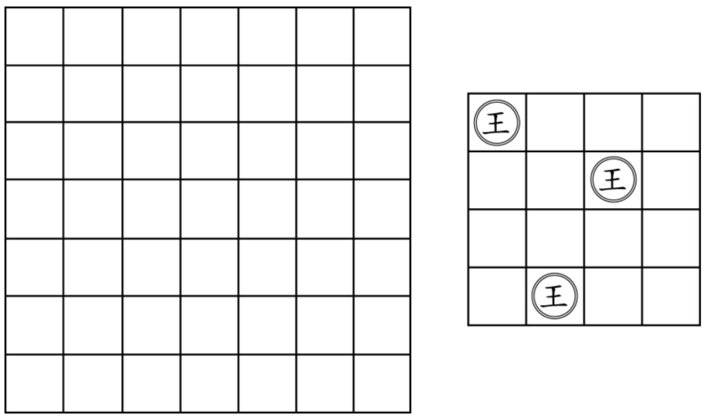
(2) 若球 O 不會進洞則以 A 點為圓心，任意小的正數為半徑畫一圓；證明此

球會碰撞此圓內撞球台的邊無限多次。

(3) 若球 O 不會進洞，則此球碰撞此撞球台的點所構成的集合是稠密（dense）於整個撞球台的邊。（本小題超過高中範圍）

動手玩數學

在 7×7 的棋盤上（共有 49 個方格）。當一位國王站在某一個格子內時，以此格子為中心的平行、垂直及兩條對角線上的格子都是此國王管轄的範圍。請問：至少需要幾位國王，才有辦法管轄整個棋盤（注意：非國王所在的方格可以由兩個以上的國王共管，但是國王所在的方格不能由兩個以上的國王共管，也就是王不見王的意思）。例如下圖是三個國王管轄 4×4 棋盤的情形：



挑戰題

證明：平面上任一凸 $2n$ 邊形的對角線中，至少有一條與此多邊形的所有邊都不平行。[12]

[12] 計算對角線數目，再利用反證法及鴿籠原理將對角線分配到與它平行的邊上。本問題原本是很難的題目，但是在鴿籠原理的使用之下，變為容易。

正方形內放置點的猜想

“正方形內放置點問題”一直是幾何學上很有趣卻很難的問題。所謂“正方形內放置點

問題”是說：在單位長的正方形內（含邊）放置相異的n個點，應該如何放置才能使此n個相異點中最接近的兩個點距離最大，設此最大距離為d_n。很明顯的，$n=2$時，將兩點放置在此正方形的對角線的兩端則得到最大的距離$\sqrt{2}$（任何其它兩點的擺設均得不到此距離），所以$d_2=\sqrt{2}$；同理$n=4$時，將四點放置在此正方形的四個頂點則得到$d_4=1$。事實上，數學家已經知道的d_n有如下：

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \sqrt{2}, & d_3 &= \sqrt{6}-\sqrt{2}, \\
d_4 &= 1, & d_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\
d_6 &= \frac{\sqrt{13}}{6}, & d_7 &= 4-2\sqrt{3}, \\
d_8 &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, & d_9 &= \frac{1}{2}, \\
d_{14} &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}, & d_{16} &= \frac{1}{3}, \\
d_{25} &= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

至於d_{10}僅知道它的近似值約為 0.421。當n值很大時，數學家們可以證明d_n的值約與

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{n}}$$

的值接近。（聰明的讀者是否能證明$d_3=\sqrt{6}-\sqrt{2}$呢？）